

Detección de Raíces Unitarias y Sensibilidad a Condiciones Iniciales en los Rendimientos del Índice S&P/BMV IPC

Hilda Esperanza Álvarez Tostado Ceballos

Profesor-Investigador-Estudiante del Doctorado en Ciencias
Económico-Administrativas
Universidad Autónoma del Estado de México
healvarezt@uaemex.mx
<https://orcid.org/0000-0002-0751-611X>

Pedro Enrique Lizola Margolis

Profesor-Investigador
Universidad Autónoma del Estado de México
plizolam@uaemex.mx
<https://orcid.org/0000-0002-0101-9323>



CC BY-NC 4.0

Detección de Raíces Unitarias y Sensibilidad a Condiciones Iniciales en los Rendimientos del Índice S&P/BMV IPC

Unit Root Detection and Sensitivity to Initial Conditions in S&P/BMV IPC Index Returns



<http://doi.org/10.5281/zenodo.10541189>

45

Hilda Esperanza Álvarez Tostado Ceballos



<https://orcid.org/0000-0002-0751-611X>

Pedro Enrique Lizola Margolis



<https://orcid.org/0000-0002-0101-9323>

Recibido: 2023/09/18
Aceptado: 2023/12/06
Publicado: 2023/12/05

Código JEL:
G10, G11, G12, G14

Resumen

Este estudio se propone abordar la cuestión de si las series temporales de rendimientos de las acciones emitidas por las empresas pertenecientes al sector de Bienes de Consumo Frecuente del índice S&P/BMV IPC presentan raíces unitarias y muestran sensibilidad a condiciones iniciales. Este planteamiento se fundamenta en el reconocimiento de la importancia de la presencia de raíces unitarias y sensibilidad inicial en las series temporales financieras. Su impacto puede generar sesgos significativos en análisis, proyecciones, toma de decisiones y gestión de riesgos en las inversiones del sector bursátil, afectando así a diversos sectores económicos del país. La relevancia de abordar esta problemática radica en la necesidad de comprender cómo la presencia de raíces unitarias puede afectar la dinámica del mercado, y cómo la sensibilidad a condiciones iniciales puede desempeñar un papel determinante en este contexto. Para abordar esta investigación, se examinarán las seis emisoras que conforman el sector de Bienes de Consumo Frecuente a través de la aplicación de la prueba de Dickey-Fuller y el cálculo del exponente de Lyapunov. Estas herramientas analíticas permitieron evaluar la existencia de raíces unitarias y la sensibilidad inicial en las series temporales de rendimientos de las acciones. El análisis concluye que las series de rendimientos logarítmicos no necesitan ser diferenciadas, dado que exhiben estacionariedad y ausencia de raíces unitarias. Al emplear el exponente de Lyapunov, se obtienen exponentes negativos para el 100% de las emisoras, indicando así que poseen cierta estabilidad y no tienden a comportarse de manera caótica.

Palabras Clave

Estacionariedad, Raíces unitarias, Dickey-Fuller, Exponente de Lyapunov, Bolsa Mexicana de Valores.

Referencia APA 7ª ed.

Álvarez, H., & Lizola, P. (2023, diciembre). Detección de Raíces Unitarias y Sensibilidad a Condiciones Iniciales en los Rendimientos del Índice S&P/BMV IPC. *Un Espacio Para la Ciencia*, 6 (1), 43-70. <http://doi.org/10.5281/zenodo.10541189>

Citación en el texto

Álvarez y Lizola (2023)
(Álvarez & Lizola, 2023)

Abstract

This study aims to address the question of whether the time series of stock returns issued by companies belonging to the FMCG sector of the S&P/BMV IPC index exhibit unit roots and sensitivity to initial conditions. This approach is based on the recognition of the importance of the presence of unit roots and initial sensitivity in financial time series. Their impact can generate significant biases in analysis, projections, decision making and risk management in stock market investments, thus affecting various economic sectors of the country. The relevance of addressing this problem lies in the need to understand how the presence of unit roots can affect market dynamics, and how sensitivity to initial conditions can play a determining role in this context. To address this research, the six issuers that make up the FMCG sector will be examined through the application of the Dickey-Fuller test and the calculation of the Lyapunov exponent. These analytical tools allowed us to evaluate the existence of unit roots and initial sensitivity in the time series of stock returns. The analysis concludes that the logarithmic return series do not need to be differentiated, since they exhibit stationarity and absence of unit roots. Using the Lyapunov exponent, negative exponents are obtained for 100% of the issuers, indicating that they have some stability and do not tend to behave chaotically.

Keywords

Stationarity, Unit Roots, Dickey-Fuller, Lyapunov Exponent, Mexican Stock Exchange.

Reference APA 7th ed.

Álvarez, H., & Lizola, P. (2023, December). Unit Root Detection and Sensitivity to Initial Conditions in S&P/BMV IPC Index Returns. *Un Espacio Para la Ciencia*, 6 (1), 43-70. <http://doi.org/10.5281/zenodo.10541189>

In-Text Citation

Álvarez & Lizola (2023)
(Álvarez & Lizola, 2023)

Introducción

A nivel global, el mercado bursátil desempeña un papel fundamental al facilitar millones de transacciones diarias de activos financieros. Esta actividad no solo influye de diversas maneras en los sectores económicos de los países, sino que también sirve como el intermediario principal de conexión entre inversionistas, empresas y entidades gubernamentales. Su impacto se refleja en los índices económicos nacionales, como consecuencia de su inherente sensibilidad del mercado a factores externos.

La volatilidad en los rendimientos de los activos financieros negociados en las bolsas de valores se ve influida por diversos elementos, como la difusión de información negativa en el mercado de valores, la presencia de incertidumbre, las reacciones de pánico a nivel mundial, entre otros. Estos factores externos contribuyen significativamente a la dinámica del mercado bursátil, generando fluctuaciones en los precios de los activos financieros y afectando la percepción general de los inversionistas y la estabilidad económica.

Para examinar el comportamiento y la tendencia de los rendimientos de las acciones emitidas por diversas empresas, se seleccionó una población compuesta por las 145 emisoras que integran la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) actualmente. La muestra específica para este análisis se compone de las 35 empresas incluidas en el Índice de Precios y Cotizaciones de la BMV (S&P/BMV IPC). Este índice, que se presenta como una muestra ponderada y representativa, tiene como objetivo evaluar el rendimiento de las acciones de mayor tamaño y liquidez enlistadas en la bolsa¹.

Esta muestra ha sido reorganizada de manera sectorial por el Comité Técnico de Metodologías de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y el Comité de Análisis de la Asociación Mexicana de Instituciones Bursátiles, A.C. (AMIB), siguiendo pautas internacionales adoptadas por otras bolsas de valores. La estructura

1. S&P/BMV IPC | S&P Dow Jones Indices (spglobal.com)

de clasificación comprende cuatro niveles y abarca un total de 10 sectores, 24 subsectores, 78 ramos y 192 subramos.

En el primer nivel de clasificación, los sectores son los siguientes: Sector I: Energía, Sector II: Materiales, Sector III: Industrial, Sector IV: Servicios y Bienes de Consumo No Básico, Sector V: Productos de Consumo Frecuente, Sector VI: Salud, Sector VII: Servicios Financieros, Sector VIII: Tecnología de la Información, Sector IX: Servicios de Telecomunicaciones y Sector X: Servicios Públicos.

Estos sectores desempeñan un papel fundamental y esencial en el crecimiento y desarrollo de la economía mexicana. Entre ellos, destaca el Sector V, que corresponde al de productos de consumo frecuente. Este sector se distingue como uno de los más dinámicos en el mercado accionario mexicano, desempeñando un papel destacado en el contexto económico y financiero. Se posiciona como un indicador clave de la salud económica de México, ya que responde directamente al nivel de consumo de la población, así como a la oferta y los precios de los insumos asociados a dichos productos en el país.

Seis emisoras dentro del índice están vinculadas al subsector de alimentos, bebidas y tabaco, destacando su peso sustancial en la muestra al superar el 20.71%, lo que representa más de una quinta parte del índice en sí. Este hecho posiciona a estas emisoras como el núcleo central del análisis. En consecuencia, demostrar las propiedades estacionarias y la sensibilidad a condiciones iniciales de los rendimientos de estas emisoras se considera un indicador esencial para evaluar la estabilidad financiera del país. Esta evaluación se vuelve crucial debido al impacto significativo que estas emisoras podrían tener, dada su ponderación destacada en la muestra del índice.

Al analizar la serie de tiempo de los rendimientos diarios de cierre de las emisoras, resulta imperativo emplear metodologías que confirmen las hipótesis de estacionariedad y sensibilidad de los procesos temporales. Desde una perspectiva teórica, la estacionariedad se justifica por diversas razones esenciales:

1. **Precisión en la Predicción:** La estacionariedad contribuye a afinar la predicción de datos, mejorando la eficacia en la aplicación de modelos estadísticos y matemáticos.
2. **Simplificación de Modelos:** Las series estacionarias posibilitan la construcción e interpretación de modelos menos complejos, simplificando así el análisis.
3. **Homogeneidad Temporal de Datos:** Al ser las series estacionarias homogéneas, las propiedades estadísticas permanecen estables a lo largo del tiempo. Esto facilita la comprensión y predicción de tendencias y patrones futuros, apoyando la toma de decisiones informadas.
4. **Facilita la Inferencia Estadística:** La estacionariedad simplifica los procedimientos de pruebas estadísticas e hipótesis, generando confiabilidad en los resultados de la inferencia estadística.

Con lo anterior, se observa que la aplicación de conceptos de estacionariedad no solo encuentra respaldo teórico, sino que también conlleva beneficios prácticos sustanciales al analizar series temporales, mejorando la precisión, simplicidad, homogeneidad y confiabilidad de los resultados obtenidos. Desde la perspectiva de su aplicabilidad en series económicas y financieras, la estacionariedad se presenta como un elemento primordial para el modelaje y la implementación de estrategias de inversión efectivas e informadas, así como para la predicción, gestión de riesgos y modelaje de fenómenos económicos y sociales.

En este estudio, la evaluación de la estacionariedad se llevó a cabo mediante las pruebas Dickey Fuller (DF) (Chambi, 2017) y Dickey Fuller aumentada (DFA) (Quinde et al. 2020), considerando el supuesto de la presencia de raíces unitarias en las series de rendimientos de las acciones. Este enfoque se complementó con la aplicación del exponente de Lyapunov, ofreciendo así una evaluación integral y robusta de la estacionariedad en el contexto específico de este trabajo.

Al establecer una relación entre estos dos conceptos, se busca explorar si la presencia de raíces unitarias en los rendimientos de activos está asociada a la sensibilidad a condiciones iniciales en el mercado financiero. En este contexto, incluso un ligero cambio en dichas condiciones puede generar impactos significativos a lo largo del tiempo (Fernández, 2016; Nguyen, 2018; Tsionas & Panayotis, 2017). Autores como Enamul y Dionísio (2021) han empleado el exponente de Lyapunov en el estudio de índices bursátiles, proporcionando evidencia del análisis de la sensibilidad a las condiciones iniciales de la serie. Este enfoque no solo amplía la comprensión de la dinámica del mercado, sino que también enriquece la evaluación de cómo las condiciones iniciales pueden influir en la estabilidad y eficiencia del sistema financiero.

Con base en lo expuesto, se evidencia que la existencia de raíces unitarias en las series temporales financieras puede introducir sesgos significativos en el análisis, proyecciones, toma de decisiones y gestión de riesgos en las inversiones realizadas en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Esto se debe a que la presencia de raíces unitarias en la serie temporal conlleva ciertas tendencias y volatilidad a largo plazo en dichas series. El núcleo problemático que aborda este estudio se centra en la identificación y gestión de las raíces unitarias, así como en la sensibilidad a las condiciones iniciales en los rendimientos de las acciones emitidas por las empresas que pertenecen al sector de Bienes de Consumo Frecuente, según la muestra definida por el índice S&P/BMV IPC.

El propósito de este artículo radica en determinar si las series de rendimientos de las acciones emitidas por las compañías pertenecientes al sector de Bienes de Consumo Frecuente del índice S&P/BMV IPC exhiben raíces unitarias y sensibilidad a las condiciones iniciales. Asimismo, se busca analizar la relación existente entre ambos fenómenos, explorando las siguientes interrogantes de investigación: ¿Las series de rendimientos de las acciones emitidas por las empresas del sector de Bienes de Consumo Frecuente del índice S&P/BMV IPC manifiestan raíces unitarias y sensibilidad a las condiciones iniciales? ¿Cuál es la naturaleza de

la relación entre la presencia de raíces unitarias y la sensibilidad a las condiciones iniciales? y ¿Cómo impactan estos factores en la estabilidad y eficiencia del mercado financiero mexicano?

Basándonos en la revisión de la literatura y estudios empíricos relacionados con el tema, se constata que el comportamiento de los rendimientos está estrechamente ligado a las reacciones de los precios en el mercado bursátil, influenciado por diversos factores complejos, entre los que se incluyen la oferta y demanda de acciones, las noticias económicas y políticas, así como los eventos de alcance global.

En el ámbito de la bolsa, los precios de las acciones pueden experimentar variaciones significativas en lapsos cortos, generando ganancias o pérdidas para las empresas emisoras que integran el mercado. Estas empresas representan pilares fundamentales para el crecimiento económico y financiero del país, ejerciendo un impacto crucial en los inversores del mercado. Estas fluctuaciones son consecuencia de la naturaleza intrínsecamente volátil del mercado, donde los inversionistas compran y venden acciones con base en sus expectativas y percepciones acerca del desempeño futuro de las empresas.

Estas expectativas respecto al comportamiento de los precios y, por ende, de los rendimientos esperados en el mercado bursátil, no siempre reflejan de manera precisa el valor intrínseco de una empresa. Además, se ven influidas por factores emocionales, como el miedo o la euforia, lo que puede dar lugar a movimientos abruptos e impredecibles en el mercado. A su vez, factores macroeconómicos, como la inflación, las tasas de interés y la estabilidad política, también desempeñan un papel crucial al afectar la confianza de los inversores y, por consiguiente, incidir en el comportamiento de los precios y los rendimientos derivados de las inversiones.

Con el propósito de abordar las interrogantes planteadas y alcanzar el objetivo establecido, se emplean la prueba Dickey Fuller para evaluar la existencia de raíces unitarias en la serie y el exponente de Lyapunov para evaluar la sensibilidad a condiciones iniciales.

El desarrollo de este estudio se organiza en cuatro secciones distintas: en primer lugar, se realiza una revisión exhaustiva de la literatura relevante; a continuación, se expone la metodología utilizada; posteriormente, se lleva a cabo un análisis detallado de los resultados obtenidos; finalmente, se presentan las conclusiones extraídas de la investigación y se esbozan posibles líneas de investigación futuras.

Estado del Arte

En el marco de este estudio, se llevó a cabo una exhaustiva revisión de la literatura relevante. Durante este proceso, se observó escasez de antecedentes que guíen la revisión y descripción de las publicaciones relacionadas con estos temas tanto de manera conjunta como independiente. Esta limitación se justifica principalmente por la naturaleza no estacionaria, el ruido y la volatilidad inherentes a los datos financieros. En otras palabras, los cambios en el tiempo en la media y la varianza, así como las fluctuaciones extremas de los precios, introducen una mayor complejidad en la aplicación de cálculos y técnicas de valoración. Este desafío se intensifica dado que, en su mayoría, se requiere que la serie de estudio cumpla con el principio de estacionariedad.

Autores como Chambi (2017), Meneses y Pérez (2020) y Quinde et al. (2020) sugieren la prueba Dickey Fuller (DF) y Dickey Fuller aumentada (DFA), respectivamente, como metodologías adecuadas para analizar la presencia de raíces unitarias en series financieras. De manera similar, Ruiz-Porras y Ruiz-Robles (2015) indican que las pruebas de raíz unitaria se emplean para evaluar el orden de integración de las series de precios y rendimientos, destacando que el análisis de estacionariedad es esencial en el estudio de las series bursátiles. Esto se debe a que el modelaje y el análisis econométrico, también conocidos como modelos univariados de series temporales, que son más robustos y precisos, requieren que las series sean integradas de orden cero $I(0)$ y cumplan con características de estacionariedad.

Según Mandelbrot (1961), las finanzas se caracterizan por ser sistemas no lineales sensibles a las perturbaciones iniciales del modelo. Considerando esta característica como crucial de medir antes de realizar análisis, autores como Wei (2021) describen el uso del exponente de Lyapunov como una herramienta poderosa para estudiar la estabilidad de sistemas dinámicos, con el objetivo de abordar la delimitación de sistemas de orden fraccional de nábula no lineales. Asimismo, Fernández (2016) ha implementado de manera exitosa el cálculo del máximo exponente de Lyapunov en series financieras de mercados latinoamericanos.

Nguyen (2018) define la función de Lyapunov como una función positiva que cumple con la (semi) definición negativa de su derivada temporal. La estabilidad de un sistema dinámico no lineal se logra al derivar temporalmente su función de energía, origen de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Tsionas y Panayotis (2017) calcularon el exponente de Lyapunov utilizando los rendimientos diarios de los mercados bursátiles de EE. UU., Reino Unido, Suiza, Países Bajos, Alemania y Francia, subrayando la importancia de estudiar los rendimientos como modelos no lineales, dados su fuerte dependencia de las condiciones iniciales.

Diversos investigadores, como Mandelbrot y Hudson (2006), Parisi et al. (2007), Sierra, Duarte y Mascareñas (2013), Calzada (2015), Cowles y Jones (1937), Alexander (1961), Fama (1970), Engle (1982), Bollerslev (1986), Lorenz (1963), Takens (1981), Mandelbrot (1961), Peters (1994), Gálvez (2005), Lipka y Los (2003), Kyaw et al. (2004), Parisi et al. (2007), y Enamul y Dionísio (2021), han aplicado el exponente de Lyapunov en el análisis de índices bursátiles. Sus resultados confirman la sensibilidad a condiciones iniciales y la presencia de patrones de rentabilidad no lineales en estos índices.

En particular, Parisi et al. (2007) examinaron los mercados estadounidenses, excluyendo a Colombia, para evaluar el comportamiento no lineal y la dependencia de las condiciones iniciales, confirmando la idoneidad del exponente de Lyapunov.

Velásquez y Restrepo (2012) llevaron a cabo un estudio en el mercado colombiano, observando comportamientos similares a los mencionados anteriormente. También compararon los índices bursátiles estadounidenses con el mercado chino, encontrando similitudes y no así con los países europeos. Utilizaron el exponente de Lyapunov en el índice de precios de Nueva Zelanda y Estados Unidos, corroborando la existencia de sensibilidad en dichos mercados.

Modelos de Estudio

Pruebas de raíces unitarias

Para confirmar la presencia de raíces unitarias Bazán (2020) refiere que si $x_t = \alpha x_{t-1} + \varepsilon_t$, entonces se dice que es un proceso estacionario como lo muestra la Ecuación 1 o bien como en la Ecuación 2.

$$\sigma_{x_t}^2 = \alpha^2 \sigma_{x_{t-1}}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2 \rightarrow \sigma_{x_t}^2 - \alpha^2 \sigma_{x_t}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 \rightarrow \sigma_{x_t}^2 (1 - \alpha^2) = \sigma_{\varepsilon}^2 \quad (\text{Ecuación 1})$$

$$\sigma_{x_t}^2 = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{(1 - \alpha^2)} \quad (\text{Ecuación 2})$$

Si $\alpha = 1$, no se encuentra evidencia estadística para sostener que el proceso sea estacionario, lo cual indica presencia de raíz unitaria. Cuando $\alpha > 1$, el proceso se caracteriza por ser explosivo, mientras que si $\alpha < 1$, se observa evidencia estadística que respalda la estacionariedad, sugiriendo la ausencia de raíz unitaria. Para validar de manera matemática estas afirmaciones, se recurre a las pruebas Dickey Fuller (DF) y Dickey Fuller Aumentada (DFA). Esta última, es una mejora de la primera, busca obtener resultados más precisos al aplicar ajustes. Ambas se utilizan con el propósito de evitar resultados espurios al realizar regresiones con series de tiempo no estacionarias. Dichas pruebas buscan confirmar o refutar el cumplimiento de las siguientes hipótesis estadísticas:

H_0 : La variable no es estacionaria y tiene raíz unitaria

H_1 : La variable es estacionaria y no tiene raíz unitaria

Bajo la regresión de la Ecuación 3:

$$\Delta y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\text{Ecuación 3})$$

Para interpretar la prueba DFA, es esencial examinar los valores críticos según la distribución del estadístico DFA bajo la hipótesis nula (Stock y Watson, 2012). Wooldridge (2009) señala que, dado que la hipótesis alternativa de estacionariedad implica $\delta < 0$ en la ecuación previamente mencionada, la prueba es unilateral. En consecuencia, el valor de la estadística t debe ser inferior a los valores críticos unilaterales para rechazar la hipótesis nula (H_0), según explican Quinde et al. (2020).

Según Jalil y Rao (2019), la interpretación de la prueba se realiza de la siguiente manera:

- a) Si el valor p (estadístico de prueba) es menor o igual al nivel de significación o al valor crítico, se toma la decisión de rechazar la hipótesis nula. Esto indica que los datos aportan evidencia de estacionariedad, permitiendo así el análisis de los datos sin necesidad de diferenciarlos.
- b) Si el valor p (estadístico de prueba) es mayor al nivel de significación o al valor crítico, la decisión es no rechazar la hipótesis nula. En este caso, los datos no proporcionan evidencia suficiente para considerarlos estacionarios. Por lo tanto, se hace necesario diferenciar los datos para lograr la estacionariedad de la media.

Exponente de Lyapunov

La utilización del exponente de Lyapunov tiene como objetivo medir la separación entre dos órbitas o series cercanas a lo largo del tiempo, y detectar la sensibilidad a las condiciones iniciales en las series univariantes (Costa & Rocha, 2021). Se debe tener en cuenta que una serie temporal univariante, también denominada serie temporal unidimensional, representa observaciones secuenciales de

una única variable, generalmente a intervalos regulares a lo largo de un período de tiempo.

Según Nguyen (2018), el análisis de la estabilidad de un sistema dinámico se logra mediante la derivada temporal de su función de energía, que sirve como base para la teoría de estabilidad de Lyapunov. Olmedo et al. (2007), así como Sandubete y Escot (2021), presentan un método directo propuesto por Hahn (1963) y complementado por Wolf et al.(1985) para la estimación de los exponentes de Lyapunov. Este método evalúa la estabilidad de equilibrio de un sistema no lineal de manera inmediata, sin resolver la ecuación dinámica del sistema.

Ambos también exponen el método indirecto o jacobiano establecido por Gençay y Dechert (1992). Este método se aplica mediante una red neuronal de una sola capa oculta de avance, ajustando el modelo lineal o no lineal desconocido mediante una derivación analítica en lugar de numérica del jacobiano (McCaffrey et al., 1992; y Nychka et al., 1992; citados por Sandubete & Escot, 2021).

Para ambos métodos la función de Lyapunov $V(x)$ satisface las siguientes condiciones:

$V(x)$ es una función positiva $V(x) > 0$, con una primera derivada parcial continua.

$V(x)$ es al menos semi definido positivo de tal manera que

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx} \dot{x} = \frac{dV}{dx} f(x) \leq 0 \quad \text{o} \quad \dot{V}(x) < 0$$

Las dos trayectorias dentro del modelo de estudio, muestran una separación inicial , divergen en el instante hasta alcanzar, por lo tanto, cuando tiende a infinito y es cada vez más pequeño, la expresión que relaciona las distancias, de acuerdo a Sierra et al. (2013) es la representada por la Ecuación 4.

$$\delta x_t \approx e^{\lambda t} \delta x_0 \quad (\text{Ecuación 4})$$

Las hipótesis estadísticas a demostrar son las siguientes:

- H_0 : Implica ausencia de sensibilidad a las condiciones iniciales.
- H_1 : Implica presencia de sensibilidad a las condiciones iniciales.

El exponente de Lyapunov muestra su punto de equilibrio en $x^*=0$ si un sistema comienza en $x(t_0)=x_0$ como condición inicial, es estable si, para cualquier $R > 0$, existe alguna $r (R) > 0$ tal que $\|x_0\| < r \rightarrow \|x\| < R, \forall t \geq t_0$ de lo contrario el punto de equilibrio es inestable, o bien, si $V(x) > 0$ para todos $x(t) \in B_R$ tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ para toda $x(t) \in B_R$, entonces el equilibrio es localmente estable en el sentido de Lyapunov. Además, si para toda entonces el equilibrio es local y asintóticamente estable (Nguyen, 2018).

Después de calcular el máximo exponente de Lyapunov, se llega a la conclusión de que, si estos son positivos, el sistema dinámico subyacente se considera inestable, y si son negativos, el sistema se interpreta como estable, excluyendo la posibilidad de existencia de sensibilidad a condiciones iniciales (Sandubete & Escot, 2021; Ping et al., 2021).

La aplicación directa de las fórmulas anteriores puede ser compleja, por lo que existen herramientas valiosas para su cálculo. Softwares como Rstudio, Python y Matlab son útiles para determinar el exponente. En este caso, el análisis de los datos se llevó a cabo en Rstudio utilizando la librería *lyap_k*, para la cual se requiere la siguiente instrucción:

$$lyap_k (series, m, d, t, k=1, ref, s, eps)$$

- Series: Es el nombre de la serie unidimensional.
- m: Se refiere a la dimensión de incrustación, la cual determina cuántas variables auxiliares o retardadas deben incluirse en la representación de las series para capturar su dinámica de manera efectiva.

- d: Indica el retardo en el tiempo, que representa el valor para el período de retraso del espacio de fase o la representación de retraso en el análisis de las series temporales.
- t: Corresponde a la ventana Theiler, que es un espacio de exclusión de tiempo utilizado para evitar autocorrelaciones en el cálculo de los exponentes de Lyapunov.
- k: Es el número de vecinos considerados, haciendo referencia a la cantidad de órbitas cercanas tomadas en cuenta para estimar la tasa de divergencia exponencial de órbitas en un sistema dinámico caótico, siendo el valor por defecto uno.
- ref: Representa el número de puntos a tener en cuenta, relacionándose con la cantidad de estados en el espacio de fase considerados en la estimación de la tasa de divergencia exponencial de órbitas en un sistema dinámico caótico.
- s: Indica el número de iteraciones en el trayecto de los puntos con los vecinos. Este parámetro se refiere a cuántas veces evolucionan en el espacio de fase los vectores representantes de las órbitas cercanas antes de calcular la tasa de divergencia exponencial de dichas órbitas.
- eps: Es el radio dentro del cual encontrar a los vecinos más cercanos. Este parámetro se refiere a la distancia máxima permitida dentro del espacio de fase para que los puntos sean considerados como vecinos cercanos tomando un punto de referencia.

Metodología

Datos de la Serie Temporal

Para la realización de este estudio, se tomó en consideración una población compuesta por 145 emisoras que integran la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) actualmente. La muestra inherente para este análisis está constituida por las 35 empresas que forman parte del índice S&P/BMV IPC, así como las seis emisoras que pertenecen al sector de productos de consumo frecuente y al subsector específico de alimentos, bebidas y tabaco, como se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1

Emisoras que integran la Bolsa Mexicana de Valores seleccionadas para el estudio

No.	Clave	Emisora
1	AC*	Arca Continental, S.A.B. de C.V.
2	BIMBO A	Grupo Bimbo S.A.B.
3	CUERVO*	Becle S.A. De C.V.
4	FEMSA UBD	Fomento Económico Mexicano S.A.B. de C.V.
5	GRUMA B	Gruma S.A.B. B
6	KOF UBL	Coca-Cola Femsa S.A.B. de C.V.

El análisis de datos se lleva a cabo utilizando un conjunto de 1521 rendimientos, los cuales se calculan a partir de los precios diarios de cierre correspondientes a las seis empresas seleccionadas para la muestra. Estos datos fueron obtenidos de la plataforma Yahoo! Finanzas y abarcan el período desde el 06/01/2017 hasta el 06/15/2023.

Para cada activo i en el periodo t , los rendimientos se estiman a partir de los precios de cierre, P_{it} , definiendo así el rendimiento del activo i en el periodo t , r_{it} , como se presenta en la Ecuación 5.

$$r_{it} = \text{Ln} \left(\frac{P_{it}}{P_{it-1}} \right) \quad (\text{Ecuación 5})$$

Software de análisis

Las pruebas de DF y DFA para el análisis de raíces unitarias, así como la creación de gráficos y el análisis general de datos, junto con la aplicación del exponente de Lyapunov, fueron llevados a cabo utilizando el software estadístico Rstudio. En particular, se emplearon las librerías *tseries* y *tseriesChaos*, siendo estas esenciales, principalmente, para la ejecución de las pruebas DF y DFA.

Resultados y Discusión

En una primera fase, se genera el Figura 1 para visualizar el comportamiento y la tendencia de las series temporales de los rendimientos logarítmicos de las acciones emitidas por las seis emisoras de la muestra. Utilizando el programa Rstudio, se establecen estas series como datos temporales con una periodicidad diaria. Posteriormente, se someten a análisis utilizando la librería "*ndiffs*" para determinar la necesidad de aplicar retardos a la serie. Los resultados indican que no es necesario introducir retardos, lo cual se confirma al aplicar un retardo a la serie y generar nuevamente el Figura 2. En este último gráfico, se observa que no hay cambios significativos, es decir, la introducción de retardos no afecta de manera importante la serie. Por lo tanto, se decide utilizar la serie original para la aplicación de las pruebas subsiguientes.

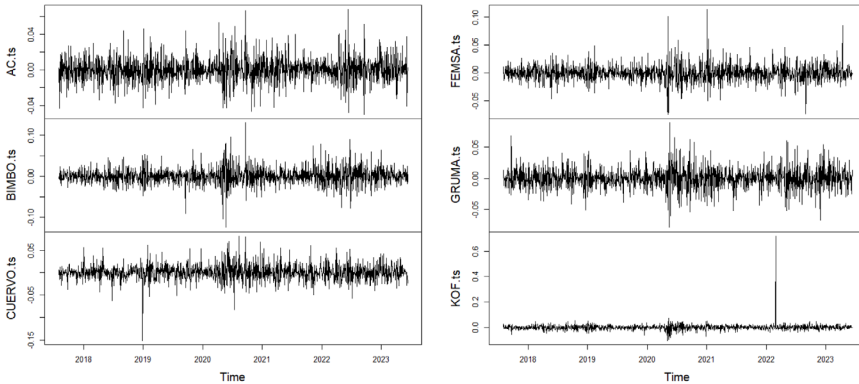
A continuación, se procedió al cálculo de las pruebas DF y DFA, empleando dos métodos. Inicialmente, se realizó una regresión lineal de los residuos de cada serie. Posteriormente, se contrastaron los resultados utilizando la librería *adf.test* en Rstudio, la cual ejecuta la prueba Dickey Fuller Aumentada.

Los resultados de estas pruebas se presentan en la Tabla 2, donde se observa que las seis emisoras exhiben un valor estadístico menor que el valor crítico. Estos resultados sitúan estadísticamente los datos en la región de rechazo de la hipótesis nula (H_0). En consecuencia, se concluye que las series de rendimientos son estacionarias y carecen de raíces unitarias. Además, la regresión efectuada indica que los residuos de los modelos también son estacionarios.

La prueba mencionada anteriormente se recomienda y aplica debido a su simplicidad en el cálculo, además de contar con diversas herramientas de software disponibles, como Rstudio, Python, Eviews, Stata, Matlab e incluso algunas funciones de Excel. Esto se debe a que es posible calcularla mediante una regresión de la serie. Sin embargo, para el cálculo del exponente de Lyapunov se requiere mayor complejidad, y por ello el número de herramientas

Figura 1

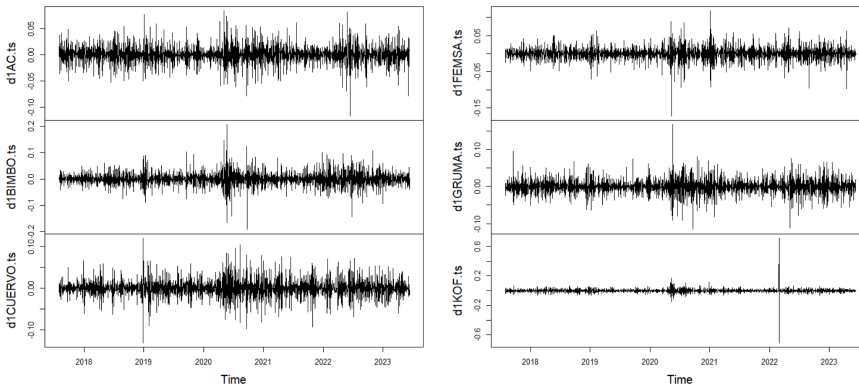
Tendencia de los rendimientos logarítmicos de las acciones emitidas por las empresas de la muestra 2017-2023



Nota de la figura: Elaboración propia con datos de Yahoo! Finanzas en Rstudio.

Figura 2

Tendencia de las series logarítmicas retardadas de las acciones emitidas por las empresas de la muestra 2017-2023



Nota de la figura: Elaboración propia con datos de Yahoo! Finanzas en Rstudio.

Tabla 2

Aplicación de las Pruebas DF y DFA

Emisora	Prueba DF	p-value	Prueba ADF	p-value	Conclusión
AC	-2.8323	-2.58	-12.828	0.01	Serie Estacionaria
BIMBO	-31.544	-2.58	-12.768	0.01	Serie Estacionaria
CUERVO	-25.916	-2.58	-11.100	0.01	Serie Estacionaria
FEMSA	-29.134	-2.58	-10.683	0.01	Serie Estacionaria
GRUMA	-29.830	-2.58	-11.022	0.01	Serie Estacionaria
KOF	-27.753	-2.58	-10.679	0.01	Serie Estacionaria

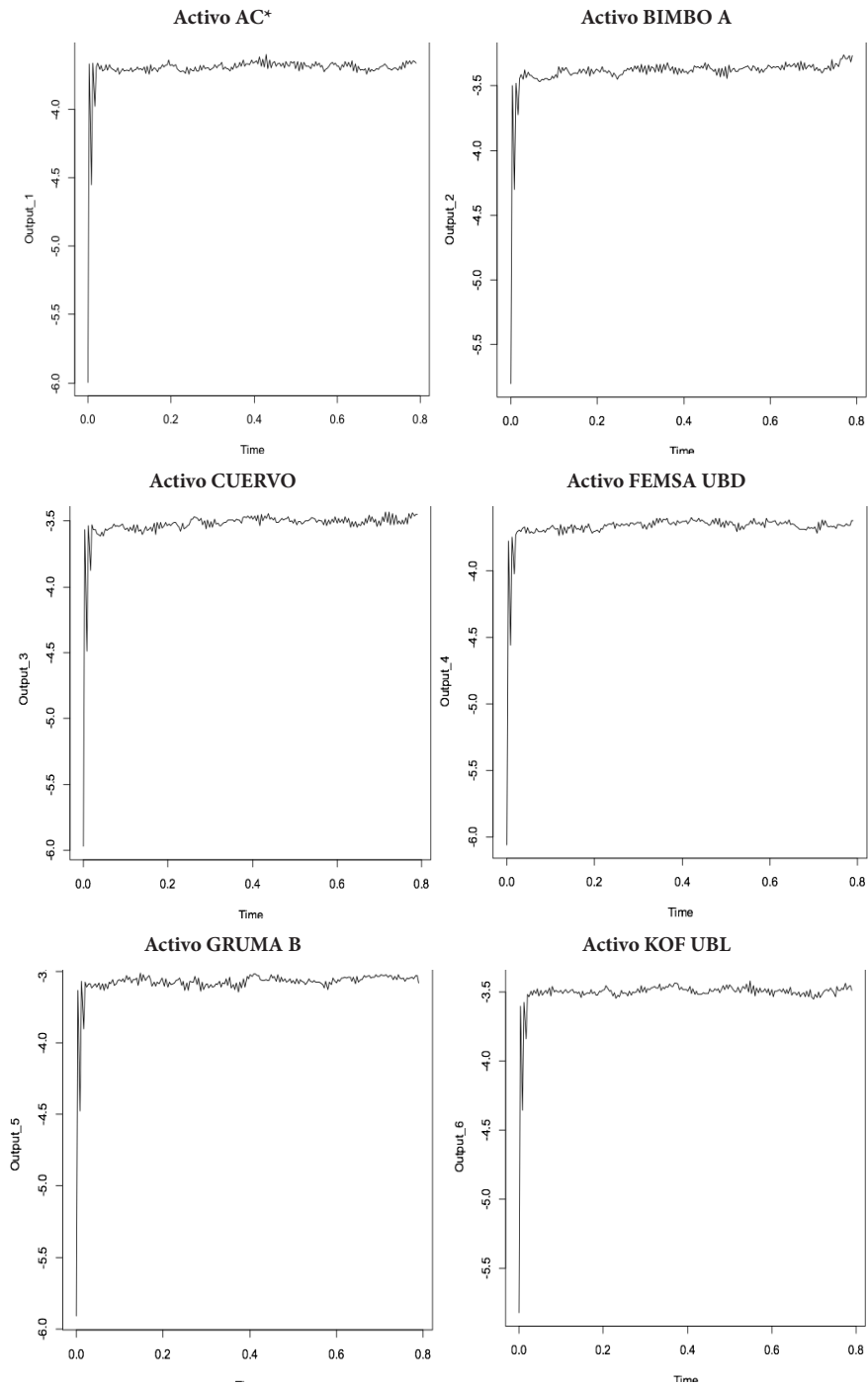
Nota de la tabla: Elaboración propia con datos de Yahoo! Finanzas en Rstudio.

disponibles es más limitado. Por ejemplo, es posible calcularlo utilizando librerías específicas en Rstudio, Python y Matlab, pero algunas no son compatibles con todas las versiones. Además, para la aplicación de las fórmulas de cálculo, se necesita un amplio conocimiento sobre la teoría del caos y tener en cuenta los parámetros requeridos.

En el Figura 3, incisos a-f respectivamente, con el orden de la clave de los activos de las emisoras AC, BIMBO, CUERVO, FEMSA, GRUMA, KOF, se presentan los resultados obtenidos con la aplicación del exponente de Lyapunov utilizando la librería *lyap_k* en Rstudio. Estos resultados evidencian que el 100% de las emisoras presenta exponentes negativos. De acuerdo con la teoría, el comportamiento de los rendimientos es estable para el período de estudio, es decir, no se rechaza la hipótesis nula (H_0). En consecuencia, se puede concluir que hay ausencia de sensibilidad a las condiciones iniciales, descartando así un comportamiento con tendencia caótica.

Figura 3

Valores del Exponente de Lyapunov para las Emisoras de la Muestra



Nota: Elaboración propia con datos de Yahoo! Finanzas en Rstudio.

Conclusiones

A pesar de que la literatura niega una relación directa entre los parámetros de estudio, la estacionariedad y la sensibilidad a condiciones iniciales, si bien, describen características independientes, si existe relación entre ellas principalmente con la naturaleza de la serie temporal y su dinámica subyacente.

En una serie de tiempo financiera estacionaria, se presume que la dinámica es más predecible y menos caótica, mostrando tendencia a la estabilidad. En este contexto, los cambios en los precios o tasas no exhiben comportamientos caóticos extremos, y las perturbaciones tienden a revertirse con el tiempo. Los exponentes de Lyapunov en una serie estacionaria generalmente son negativos o cercanos a cero, indicando que las perturbaciones iniciales disminuyen con el tiempo en lugar de crecer exponencialmente, como sucede en las series propensas a comportamientos caóticos o inestables.

Los resultados previamente expuestos confirman esta relación al demostrar que, al existir estacionariedad en los rendimientos, todos los exponentes de Lyapunov obtenidos son negativos, lo que niega la presencia de sensibilidad en la serie. Por ende, se puede concluir que, durante el período de estudio, los rendimientos en el sector de bienes de consumo frecuente son estables. En consecuencia, invertir en instrumentos emitidos por las empresas que lo conforman no representa un riesgo mayor al habitual en el mercado bursátil.

Contrariamente, si las series temporales fueran no estacionarias o caóticas, los exponentes de Lyapunov serían positivos o significativamente diferentes de cero. Esto reflejaría la sensibilidad a las condiciones iniciales y la capacidad de las pequeñas perturbaciones para crecer exponencialmente con el tiempo. En este escenario, los precios o tasas podrían experimentar movimientos impredecibles y extremos.

En resumen, una serie de tiempo estacionaria sugiere cierta estabilidad y previsibilidad en sus patrones, mientras que una serie de tiempo no estacionaria o caótica indica mayor complejidad y sensibilidad a las condiciones iniciales. Los exponentes de Lyapunov proporcionan una medida cuantitativa de esta sensibilidad.

Referencias

- Alexander, S. (1961). Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks. *Industrial Management Review*, (2), 7-26. <http://tinyurl.com/yps3vkt5>
- Bazán, W. (2020). Fundamentos para pronosticar una serie de tiempo estacionaria con información de su propio pasado. *Revista Industrial Data*, 23(1), 207-228. <https://doi.org/mb4f>
- Bollerslev, T. (1986, April). Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327. <https://doi.org/bdw3mq>
- Calzada, F. (2015, diciembre). *El exponente de Hurst y su utilización en los mercados financieros. Una aplicación al tipo de cambio en México* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional Autónoma de México. https://t.ly/UKjW_
- Chambi, P. (2017). La volatilidad de los mercados financieros globalizados: Impacto en la bolsa de valores de Lima – Perú. *QUIPUKAMAYOC*, 25(47), 103-111. <https://doi.org/mb4h>
- Costa, E., & Rocha, F. (2021). Sistemática para Análise de Séries de Tráfego de Rede Sob o Espectro da Teoria do Caos. XXXIX Simposio Brasileiro de Telecomunicações y Procesamiento de Señales. 26–29 de septiembre de 2021. Fortaleza. <https://doi.org/mb4j>
- Cowles, A., & Jones, H. (1937, July). Some A Posteriori Probabilities in Stock Market Action. *Econometrica*, 5(3), 280-294. <http://tinyurl.com/yckhfa7s>
- Enamul, M., & Dionísio, A. (2021). Market Efficiency Dynamics and Chaotic Behavior of Dhaka Stock Exchange: Evidence from Mutual Information and Lyapunov Exponents Models. *Universal Journal of Accounting and Finance*, 9(4), 796-809. <http://tinyurl.com/29rfch25>

- Engle, R. (1982, July). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), 987-1007. <http://tinyurl.com/2eak8567>
- Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, 25(2), 383-417. <https://doi.org/b3kfdx>
- Fernández, M. (2016). Dinámica No Lineal, Teoría del Caos y Sistemas Complejos: una perspectiva histórica. *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 109(1/2), 107-126. <http://tinyurl.com/mr2fdh9n>
- Gálvez, E. (2005). *Análisis Fractal del Mercado de Valores de México (1978-2004)* (Tesis de doctorado). Instituto Politécnico Nacional. <http://tinyurl.com/5n76evsv>
- Gencay, R., & Dechert, W. (1992), An algorithm for the n Lyapunov Exponents of an n dimensional unknown dynamical system. *Physica D*, 59, 142-157. <https://t.ly/f4gDS>
- Jalil, A., & Rao, N. (2019). Environmental Kuznets Curve (EKC). A Manual. In *Time Series Analysis (Stationarity, Cointegration, and Causality)* (pp. 85-99). Academic Press. <https://doi.org/mb4k>
- Kyaw, N., Los, C., & Zong, S. (2004, November 8). Persistence Characteristics of Latin American Financial Markets. *Economics Working Paper*. <https://doi.org/b6ng2n>
- Lipka, M., & Los, A. (2003, July). Long-Term Dependence Characteristics of European Stock Indices [Monography]. *Kent State University*. <https://doi.org/fjfrx5>
- Lorenz, N. (1963, March). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20(2), 130-141. <http://tinyurl.com/3kuj3fts>
- Mandelbrot, B. (1961, October). Stable Paretian random functions and the multiplicative variation of income. *Econometrica*, 29(4), 517-543. <https://doi.org/b5hqkk>

- Mandelbrot, B., & Hudson, R. (2006). *Fractales y finanzas. Una aproximación matemática a los mercados: arriesgar, perder y ganar*. Tusquets.
- Meneses, L., & Pérez, C. (2020, julio/diciembre). Análisis comparativo de eficiencia en mercados emergentes. El caso de Colombia, Chile y Perú. *Apuntes Contables*, (26), 9-24). <https://doi.org/mb4n>
- Nguyen, T. (2018, March 2). Lyapunov Stability Theory. Teoría de la estabilidad de Lyapunov. *In Model-Reference Adaptive Control. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing* (pp. 47-81). Springer. <https://doi.org/mb4p>
- Olmedo, E., Gimeno, R., Escot, L., & Mateos, R. (2007, mayo). Convergencia y estabilidad de los tipos de cambio europeos: una aplicación de exponentes de Lyapunov. *Cuadernos de Economía*, 44, 91-108. <http://tinyurl.com/23be8e9v>
- Parisi, F., Espinosa, C., & Parisi, A. (2007, octubre/diciembre). Pruebas de comportamiento caótico en índices bursátiles americanos. *El trimestre económico*, 74(4), 907-927. <http://tinyurl.com/4xmdu6c8>
- Peters, E. (1994). *Fractal market analysis*. Wiley Finance Editions. <https://t.ly/wERSH>
- Ping, Z., Xikui, H., Zhigang, Z., & Jun, M. (2021, September). What is the most suitable Lyapunov function? *Chaos, Solitons and Fractals*, 150, 111154. <https://doi.org/grw7jv>
- Quinde, V., Bucaram, R., Saldaña, M., & Ordeñana, A. (2020). Relación entre el crecimiento y el desarrollo económico: caso Ecuador. *Universidad y Sociedad*, 11(4), 391-397. <http://tinyurl.com/yc5d2k6a>
- Ruiz-Porras, A., & Ruiz-Robles, B. (2015, January/February). La hipótesis de eficiencia y la modelación de series bursátiles mexicanas: un análisis multivariado. *Economía Informa*, 390, 28-57. <https://doi.org/f26hz2>

- Sandubete, J., & Escot, L. (2021, June). DChaos: An R package for chaotic time series analysis. *The R Journal*, 13(1), 232-252. <http://tinyurl.com/5886rm6r>
- Sierra, K., Duarte, J., & Mascareñas, J. (2013). Comprobación del comportamiento caótico en bolsa de valores de Colombia. *Estrategia organizacional*, 2, 41-53. <https://doi.org/gn9nps>
- Stock, J., & Watson, M. (2012). *Introducción a la Econometría* (3ª ed.). Pearson. <http://tinyurl.com/5dw9vbs2>
- Takens, F. (1981). Detecting strange attractors in turbulence. In D. Rand, & L. S. Young (Eds.). *Lecture Notes in Mathematics* (pp. 366-381). <http://tinyurl.com/4a42d3wa>
- Tsionas, M., & Panayotis M. (2017, September 15). Neglected chaos in international stock markets: Bayesian analysis of the joint return–volatility dynamical system. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 482, 95-107. <https://doi.org/gbpvpb>
- Velásquez, H., & Restrepo, J. H. (2012). Análisis del índice general de la bolsa de valores de Colombia y sus rendimientos desde la teoría del caos, 2001-2011. *Semestre económico*, 15(31), 79-98. <https://doi.org/mb4q>
- Wei, U. (2021). Lyapunov Stability theory for Nonlinear Nabla Fractional Order Systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 68(10), 3246-3250. <http://tinyurl.com/4n37r52j>
- Wolf, A., Swift, J., Swinney, H., & Vastano, J. (1985, July). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3), 285-317. <https://doi.org/c4swqs>
- Wooldridge, J. (2009). *Introducción a la econometría un enfoque moderno* (4ª ed.). Cengage Learning. <https://t.ly/Xr5R->